Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.
Tid: Tisdagen den 27 Oktober 2015, kl. 8.30-12.30. Examinator: Olle Nerman .
Jour: Olof Elias, telefon: 076 2026293 , rum L3089, MV, Chalmers.
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Betrakta en diskret stokastisk variabel **X** med (kumulerade) fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{när } x \leq -1, \\ 0.1 & \text{när } x \in [-1,0)\,, \\ 0.5 & \text{när } x \in [0,2) \text{ och} \\ 1 & \text{när } x \geq 2\,. \end{cases}$$

   a. Vad är sannolikhetsfunktionen (=diskreta frekvensfunktionen) för **X**? (1p)
   b. Vad är väntevärdet och variansen för **X**? (2p)
   c. Vad blir värdet av sannolikhetsfunktionen för summan av två oberoende stokastiska variabler med samma fördelning som **X** evaluerad i punkten **x=2**? (2p)

2. Du kastar två vanliga tärningar (med de vanliga utfallssidorna **1**,**2**,... ..,**6**), en röd och en blå, och betraktar de tre händelserna **A**, att den blå tärningen får ett udda utfall, **B** att den röda tärningen får ett udda utfall och **C** att summan av de båda tärningarna får ett udda utfall. Visa att de tre möjliga paren (paret **A**,**B**, paret **A**,**C** och paret **B**,**C**) alla utgör par av oberoende händelser, men att de tre händelserna **A**,**B**,**C** **inte** utgör en triplett av oberoende händelser. (3p)

3. Betrakta en Poissonfördelad stokastisk variabel **X** med väntevärdet **81**.
   a. Du skall uppskatta sannolikheten för händelsen att **X** är större än eller lika med **100** med hjälp av centrala gränsvärdessatsen. (När du gör det skall du helst använda en så kallad halv- eller halvtalskorrektion.) (2p)
   b. Hur uppskattar du sannolikheten för att **X=100** med hjälp av en centrala gränsvärdes-approximation av sannolikheterna **P(X≥100)** och **P(X>100)**. (Nu måste du använda halvtalskorrektioner!) (2p)

4. Vid en jämförelse av vikterna för nyfödda barn vid en viss förlossningsklinik mellan två olika årtal, år 1990 och år 2000, uppmättes vikterna för **50** (slumpvalda) nyfödda flickor från vardera året. Stickprovsmedelvärdena blev **3.250** kg för de födda 1990 och **3.330** kg för de födda år 2000. De båda stickprovsstandardavvikelserna blev **0.310** respektive **0.275** kg. Antag att de båda teoretiska varianserna är lika.
   a. Ge ett observerat symmetriskt konfidensintervall för de båda teoretiska flick-medelvikternas differens med approximativ konfidensgrad **95%** . (2p)
   b. Testa, med approximativ signifikansivå **5%,** nollhypotesen att ingen systematisk förändring av medelvikten hos nyfödda flickor skett mellan de två årgångarna. Använd ett tvåsidigt test. Vad blir din slutsats? (Motivera svaret) (2p)

5. I en Poissonprocess **N(t)** med intensiteten **c** så är som bekant $\hat{c} = N(t)/t$ en bra punktskattning av **c** för fixt **t**. Visa att

a. denna punktskattning är väntevärdesriktig, (1p)

b. standarfelet av punktskattningen konvergerar mot **0** när **t** $\to\infty$, (1p)

c. att $\mathbf{P(|\hat{c}\text{-}c\,| > \epsilon) \to 0}$, då **t** $\to\infty$. (Använd Chebyshevs olikhet på lämpligt sätt.) (2p)

6. En tvådimensionell stokastisk variabel har sannolikhetstätheten **c g(x,y)** där **c** är en konstant och **g(x,y)= exp-(3x+5y)** för **x>0** och **y>0** (och **g(x,y)=0** för övrigt).

a. Bestäm konstanten **c**. (1p)

b. Bestäm de endimensionella sannolikhetstätheterna för **X** respektive **Y**. (1p)

c. Bestäm frekvensfunktionen för **Z=X+Y**. (2p)

7. Antag att $\mathbf{X=(X_1,X_2,X_3)}$ är multinomialfördelad $\mathbf{(n=100,\ p_1=1/3, p_2=1/3,\ p_3= 1/3)}$. Vad är (Motivera alla svaren)

a. Variansen för $\mathbf{X_1}$? (1p)

b. Variansen för $\mathbf{X_1+X_2}$? (2p)

c. Variansen för $\mathbf{X_1\text{-}X_2}$? (1p)

8. Du har två oberoende stickprov av storlek **7** resp **13** på två normalfördelningar med olika okända väntevärden. Redan i modellen antar att varianserna hänger ihop på ett sådant sätt att observationerna i det lilla stickprovet har dubbelt så stor varians som det stora, men i övrigt är varianserna inte kända.

a. Använd de båda väntevärdena och variansen för variablerna i det lilla stickprovet som parametrar och skriv upp likelihoodfunktionen för observationerna. (1p)

b. Beräkna Maximum Likelihoodskattningen av parametrarna du infört i a-delen. (2p)

Lycka Till!